SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Programación lineal

Docente: PHFLUCKER H. COZ

academiacesarvallejo.edu.pe

PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de programación lineal tiene como finalidad maximizar o minimizar una función objetivo.

Estructura de un problema de PL:

máx. (mín.) $f(x;y) = ax + by$ **Función objetivo**

Sujeto a (s.a.):

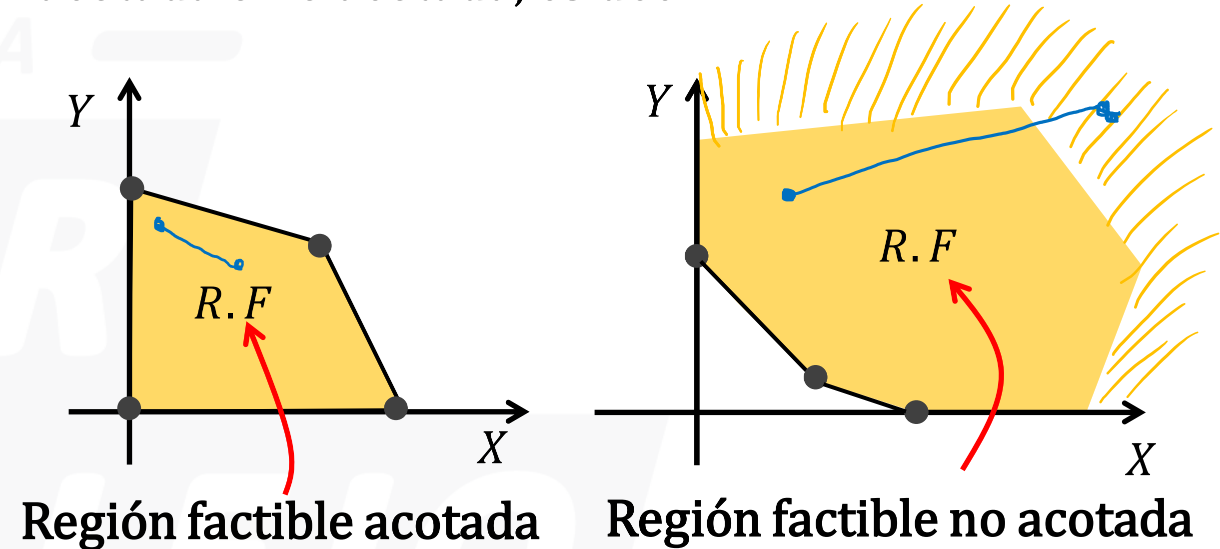
$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \geq c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \ldots (*) \end{cases}$$

Restricciones

$(*)$ condición de no negatividad

Observación:

La gráfica del conjunto de restricciones es llamada **región factible** y esta puede ser acotada o no acotada, es decir:

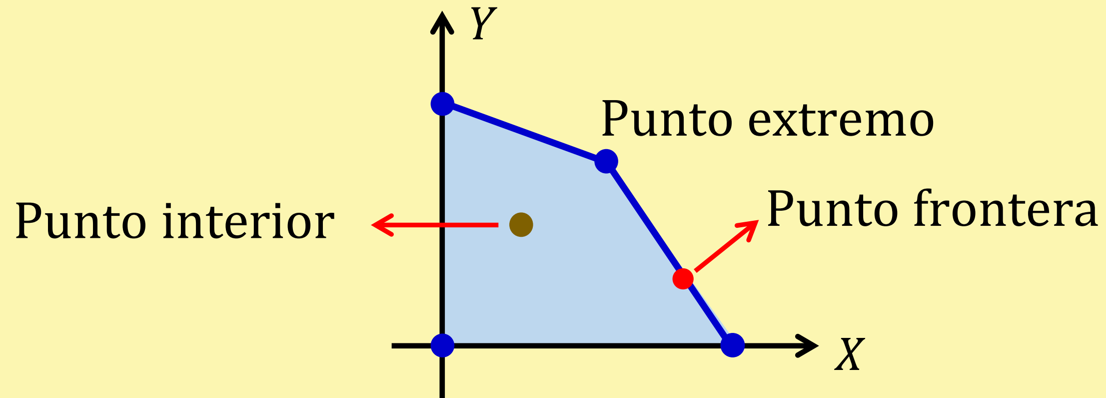


Nota

- La R.F. es un conjunto convexo.
- El número de vértices de la R.F. siempre es finita.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Observación:



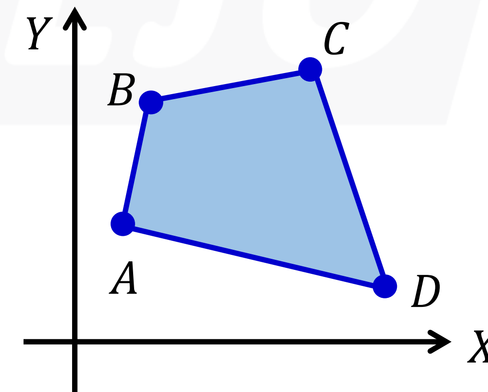
Un punto extremo (vértice) también es punto frontera.

Definiciones:

- **Punto factible** (punto adherente): Es todo punto que pertenece a la región factible.
- **Solución óptima:** Es aquel punto perteneciente a la región factible que maximiza o minimiza a la función objetivo.
- **Valor óptimo:** Es el máximo o mínimo valor que adquiere la función objetivo .

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Si un problema de **Programación Lineal** tiene región factible no vacía, entonces, si existe el óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo, esta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible.

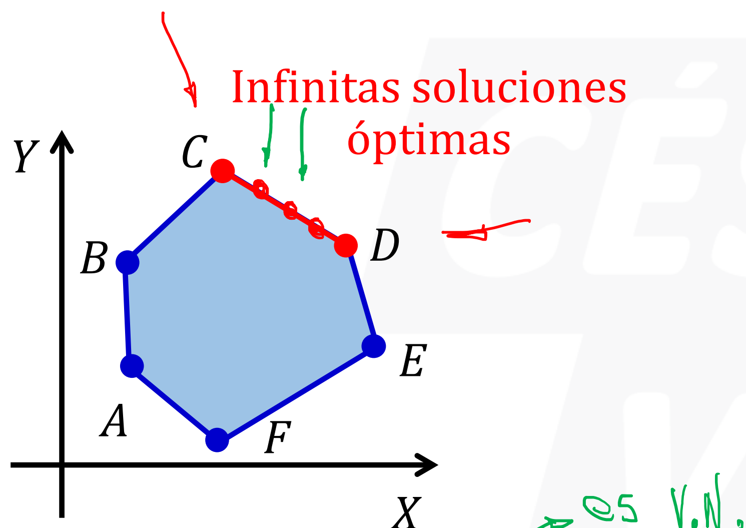


máx. o mín. de $f(x; y)$ ocurre en A, B, C o D

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Corolario

Si el óptimo de la función objetivo ocurre en dos puntos extremos, entonces se tiene el mismo valor en el segmento que une dichos puntos.



Si $f(C) = f(D) = \text{máx } f$

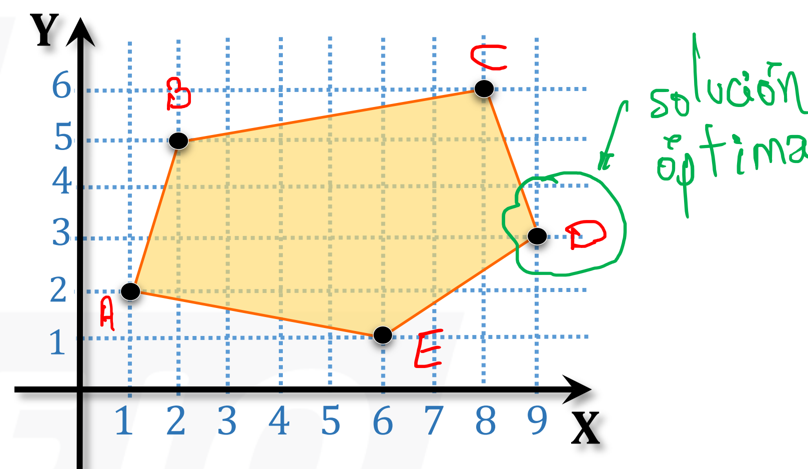
→ $\text{máx } f = f(P);\ \forall P \in \overline{DC}$

Aplicación

Resuelva el siguiente problema

Min.: $f_{(x;y)} = -4x + 3y$ ← función objetivo

Sujeta a la siguiente región



Resolución

$A(1;2) \Rightarrow f(1;2) = -4(1) + 3(2) = 2$

$B(2;5) \Rightarrow f(2;5) = -4(2) + 3(5) = 7$

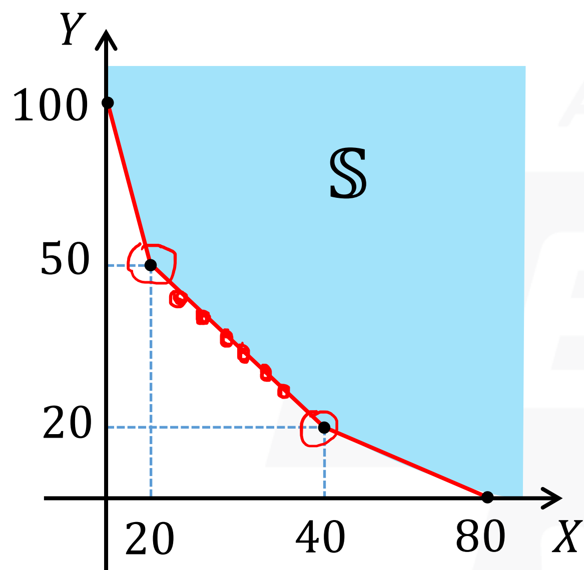
$C(8;6) \Rightarrow f(8;6) = -4(8) + 3(6) = -14$

$D(9;3) \Rightarrow f(9;3) = -4(9) + 3(3) = -27$ ← menor

$E(6;1) \Rightarrow f(6;1) = -4(6) + 3(1) = -21$

Aplicación

La región admisible $\mathbb{S}$ del problema de programación lineal mín $f(x;\ y) = 6x + 4y$ se muestra en el gráfico.



Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. El valor óptimo es 320. V

II. El problema tiene infinitas soluciones. V

III. El punto(26; 41)es una solución. V

Resolución

$x = 0 \wedge y = 100 \implies f(0;100) = 6(0) + 4(100)$

$f(0;100) = 400$

$x = 20 \wedge y = 50 \implies f(20;50) = 6(20) + 4(50)$

$f(0;100) = 320$

$x = 40 \wedge y = 20 \implies f(40;20) = 6(40) + 4(20)$

$f(40;20) = 320$

$x = 80 \wedge y = 0 \implies f(80;0) = 6(80) + 4(0)$

$f(80;0) = 480$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Calcule el valor máximo de la función objetivo $f(x;y) = 12x + 14y$ sujeto a las siguientes restricciones:

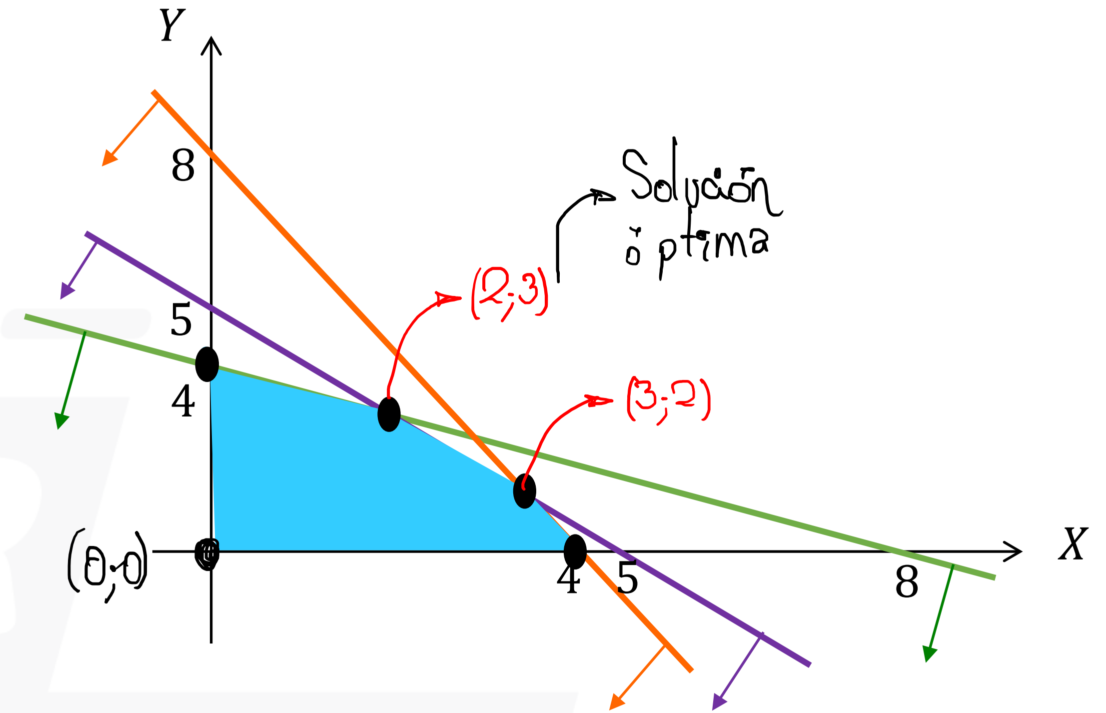
$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0\,;\, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

$y \leq -\frac{x}{2} + 4 \implies y = -\frac{x}{2} + 4$

$y \leq -2x + 8 \implies y = -2x + 8$

$y \leq -x + 5 \implies y = -x + 5$



$x = 0 \wedge y = 4 \implies f(0;4) = 12(0) + 14(4) = 56$

$x = 2 \wedge y = 3 \implies f(2;3) = 12(2) + 14(3) = 66$

$x = 3 \wedge y = 2 \implies f(3;2) = 12(3) + 14(2) = 64$

$x = 4 \wedge y = 0 \implies f(4;0) = 12(4) + 14(0) = 48$

Respuesta : 66

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PL CON USO DE RECTAS DE NIVEL

RECTAS DE NIVEL

Las rectas de nivel de la función objetivo $z = ax + by$ se obtiene asignándole cualquier real a z.

$$k = ax + by \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{k}{b};\ k \in \mathbb{R}$$

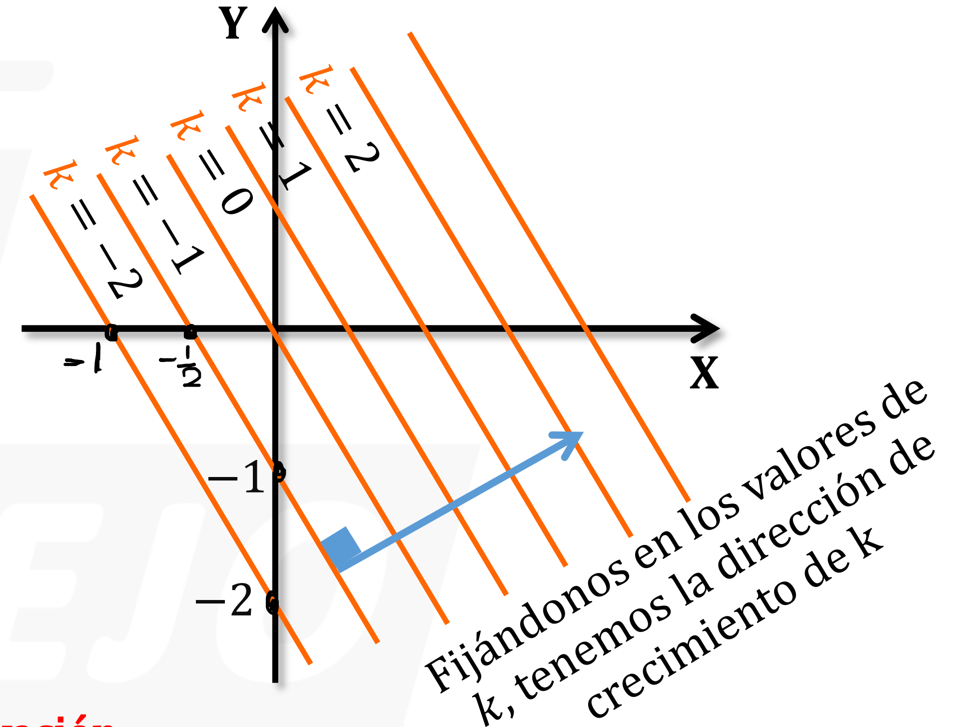
Ejemplo:

Determine las rectas de nivel que genera la función $f(x; y) = 2x + y$

Resolución:

$$k = 2x + y$$

$k = -2$	$-2 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x - 2$
$k = -1$	$-1 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x - 1$
$k = 0$	$0 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x$
$k = 1$	$1 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x + 1$
$k = 2$	$2 = 2x + y$	$\leftrightarrow$	$y = -2x + 2$



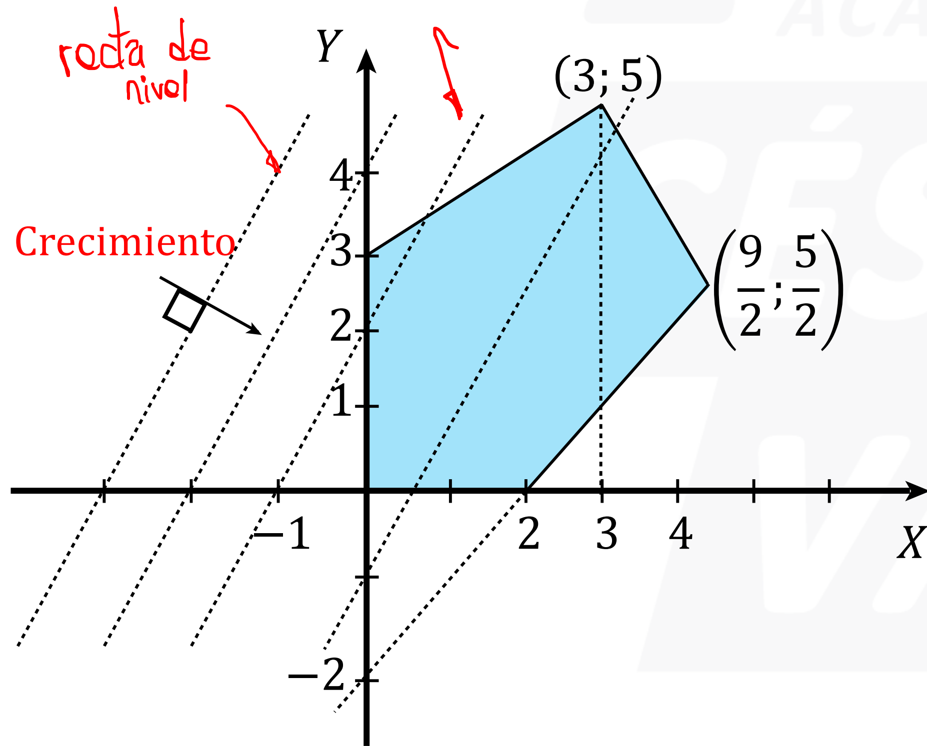
Observación:

Las rectas de nivel, son rectas paralelas de pendiente $-a/b$, por lo tanto será suficiente graficar una de ellas y las otras serán paralelas a la primera.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

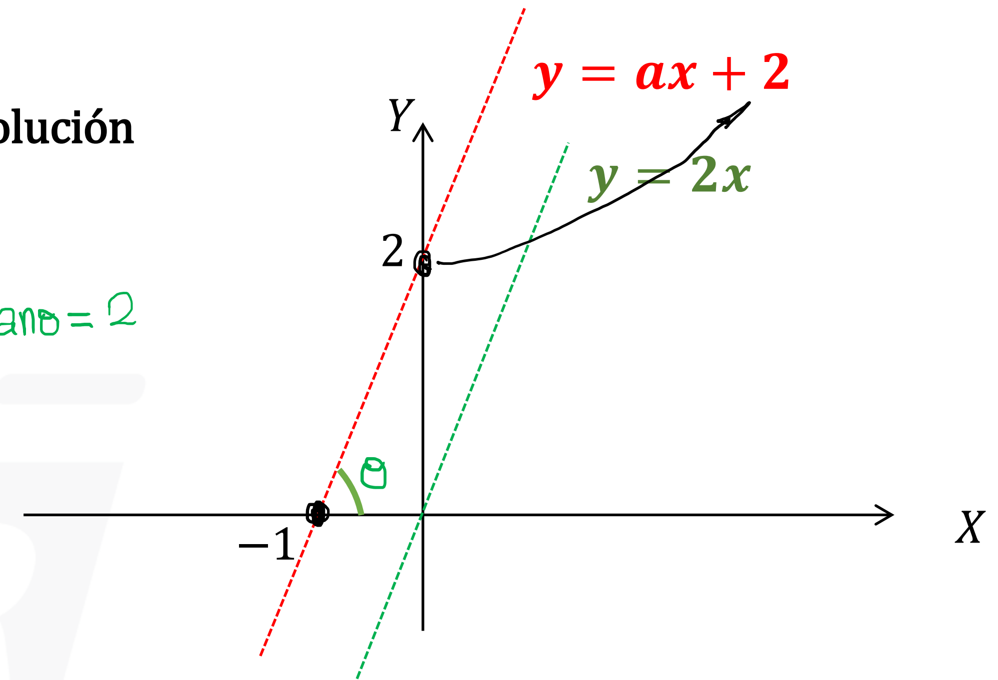
Aplicación

La región admisible S y el crecimiento de la función objetivo del problema maximizar $f(x,y)$ s.a. $(x,y) \in S$ se muestra en la siguiente figura:



Determine el máximo valor de $f(x;y)$.

Resolución



La función objetivo se obtiene pasando todo a un lado $\quad y = 2x$

$$\Longrightarrow \quad f(x;y) = 2x - y \quad ó \quad f(x;y) = -2x + y$$

$$f(0;3) = 2(0) - (3) = -3$$

$$f(3;5) = 2(3) - (5) = 1$$

$$f\left(\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right) = \boxed{\frac{13}{2}}$$

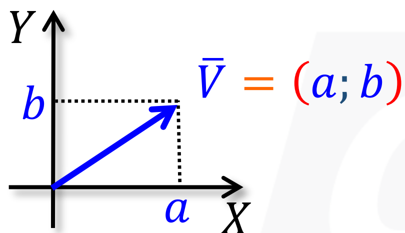
Rta

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

VECTOR DIRECCIÓN

Considerando a y b positivos

Este vector ($\bar{V}$) nos indica la dirección en que aumenta $z = ax + by$.



- La pendiente del vector dirección de crecimiento es: $m_{\bar{V}} = \frac{b}{a}$

- Pendiente de las rectas de nivel: $m_{\mathcal{L}} = -\frac{a}{b}$

- Las rectas de nivel y el vector de dirección de crecimiento son perpendiculares

$$m_{\mathcal{L}} \times m_{\bar{V}} = \left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Determine las rectas de nivel y su vector dirección de crecimiento, que genera la función $f(x; y) = 2x - y$

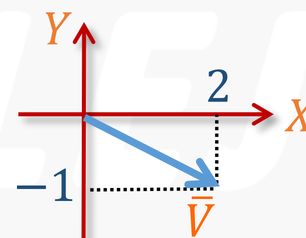
Resolución:

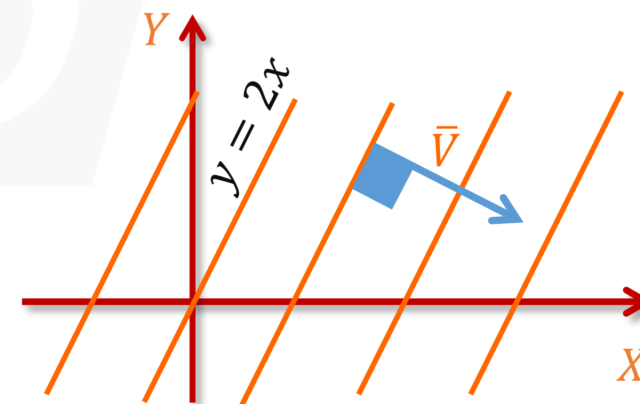
Es suficiente dibujar una recta de nivel: $k = 2x - y$,

$k = 0$: $\quad 0 = 2x - y \leftrightarrow y = 2x$

Las otras son paralelas

Vector dirección de crecimiento: $\bar{V} = (2; -1)$





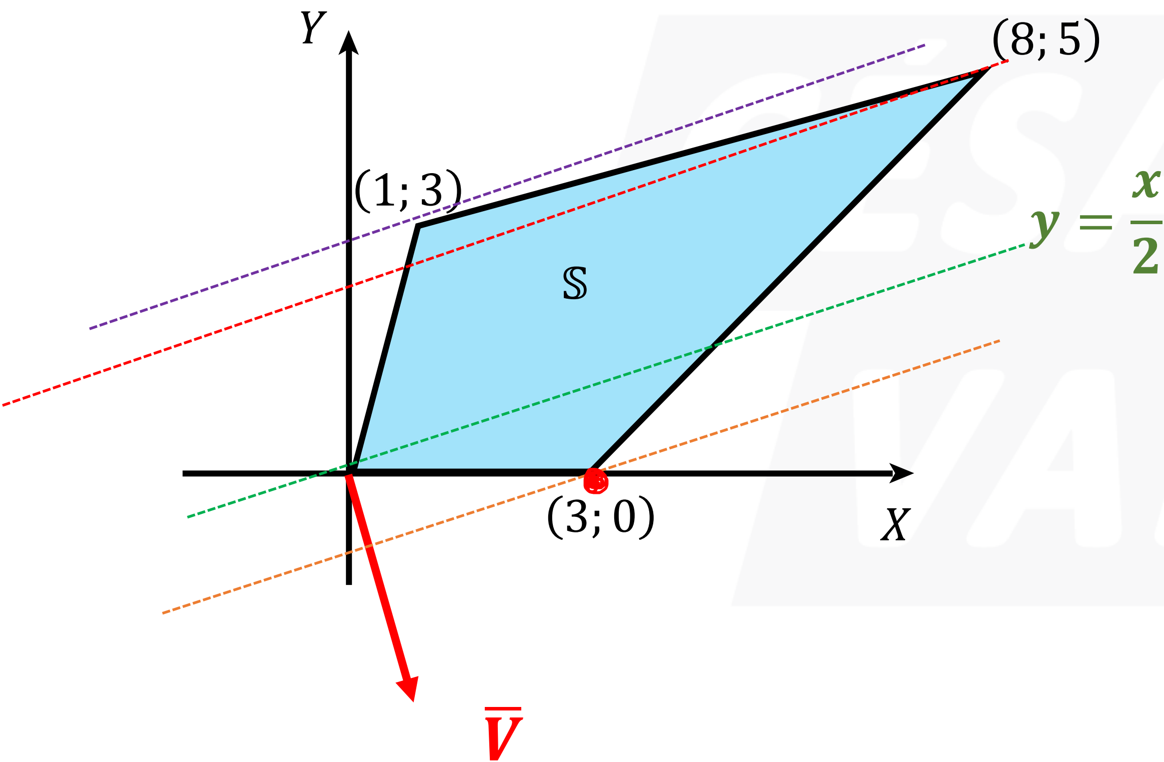
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Resuelva el siguiente problema

$$Máx.\, z = x - 2y$$

Sujeto a la siguiente región



Resolución: 1

$x = 1 \wedge y = 3 \implies f(1;3) = (1) - 2(3) = -5$

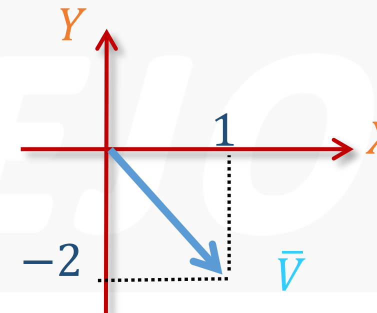
$x = 8 \wedge y = 5 \implies f(8;5) = (8) - 2(5) = -2$

$x = 3 \wedge y = 0 \implies f(3;0) = (3) - 2(0) = \boxed{3}$

Resolución: 2

$f(x;y) = x - 2y$

Vector dirección de crecimiento: $\overline{V} = (1;-2)$



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe